Prof. Dr. F. W. Knöller **SS 2008**

7. Übungsblatt zur VL "Dynamische Systeme"

Abgabe: Mi., 1.7.2008, vor der VL

7.1.
Gebe eine Liapunov-Funktion für

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y^3 \\ \dot{y} &= \ \ x^3 \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= -2y + yz \\ \dot{y} &= \ \ x - xz \\ \dot{z} &= \ \ xy \end{aligned} \qquad \text{an.}$$

7.2.
Bestimme die Stabilität der Gleichgewichtspunkte von $(x, y) \mapsto v(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ll} a) & (x^2 - y^2 - 1, 2y) \\ b) & (y - x^2 + 2, 2y^2 - 2xy) \\ c) & (-4x - 2y + 4, xy). \end{array}$$

7.3.
Sei $\Phi : \mathcal{D} \to X$ der maximale lokale Fluss eines glatten Vektorfeldes $v : X \to \mathbb{R}^2$, $X \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\mathcal{D} \neq \mathbb{R} \times X$. Dann ist entweder

$$\inf \{b_x \mid x \in X\} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \sup \{a_x \mid x \in X\} = 0.$$

7.4.
Sei $\overline{x} \in X$ ein asymptotisch stabiler Fixpunkt eines glatten Vektorfeldes $v : X \to \mathbb{R}^2$ mit maximalem lokalen Fluss

$$\Phi : \mathcal{D} \to X, \ \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times X$$

und

$$\mathcal{B}(\overline{x}) := \left\{ \begin{array}{l} x \in X \ \mid \ x \text{ lebt für alle } \ t \geq 0 \text{ und } \ \Phi_t(x) \to \overline{x} \\ \qquad\qquad \text{für } \ t \to \infty \end{array} \right\}$$

das "BASSIN" von $\overline{x}$. Zeige:

(1) $\mathcal{B}(\overline{x})$ ist offen und nicht leer.

(2) $\mathcal{B}(\overline{x}) \cap \mathcal{B}(\overline{y}) = \varnothing$ für zwei verschiedene asymptotisch stabile Fixpunkte $\overline{x} \neq \overline{y}$.